Aula 7 - Análise da Complexidade de Algoritmos Recursivos

**\*\*\* Entregue, num ficheiro ZIP, este guião preenchido e o código desenvolvido \*\*\***

Considere a seguinte relação de recorrência:

Função Recursiva

* Implemente uma **função recursiva** que use diretamente a relação de recorrência acima, **sem qualquer simplificação**.
* Construa um programa para executar essa função para **sucessivos valores de n** e que permita **contar o número total de multiplicações efetuadas** para cada valor de n.
* **Preencha a as primeiras colunas tabela seguinte** com o resultado da função recursiva e o número de multiplicações efetuadas para os sucessivos valores de n.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **n** | **F(n) – Versão Recursiva** | **Nº de Multiplicações** | **F(n) – Versão de Programação Dinâmica** | **Nº de Multiplicações** |
| 0 | **1** | **0** | **1** | **0** |
| 1 | **1** | **0** | **1** | **0** |
| 2 | **1** | **0** | **1** | **0** |
| 3 | **3** | **1** | **3** | **1** |
| 4 | **6** | **3** | **6** | **3** |
| 5 | **12** | **7** | **12** | **6** |
| 6 | **26** | **16** | **26** | **10** |
| 7 | **57** | **36** | **57** | **15** |
| 8 | **125** | **80** | **125** | **21** |
| 9 | **279** | **177** | **279** | **28** |
| 10 | **630** | **391** | **630** | **36** |
| 11 | **1433** | **863** | **1433** | **45** |
| 12 | **3285** | **1904** | **3285** | **55** |
| 13 | **7585** | **4200** | **7585** | **66** |
| 14 | **17611** | **9264** | **17611** | **78** |
| 15 | **41109** | **20433** | **41109** | **91** |
| 16 | **96416** | **45067** | **96416** | **105** |
| 17 | **227088** | **99399** | **227088** | **120** |
| 18 | **536896** | **219232** | **536896** | **136** |
| 19 | **1273763** | **483532** | **1273763** | **153** |
| 20 | **3031485** | **1066464** | **3031485** | **171** |
| 21 | **7235573** | **2351261** | **7235573** | **190** |
| 22 | **17315668** | **5187855** | **17315668** | **210** |
| 23 | **41539777** | **11442175** | **41539777** | **231** |
| 24 | **99877435** | **25236512** | **99877435** | **253** |
| 25 | **240645375** | **55660880** | **240645375** | **276** |

* Analisando os dados da tabela, estabeleça uma **ordem de complexidade** para a **função recursiva**.

|  |
| --- |
| **Usando o rácio F(n)/F(n-1) , verificamos que tende para um valor constante 2,205…, o que resulta numa ordem de complexidade ), exponencial.**  **Obs: a análise pode ser verificada no ficheiro Excel em anexo do file zip** |

Programação Dinâmica

* Uma forma alternativa de resolver alguns problemas recursivos, para evitar o cálculo repetido de valores, consiste em efetuar esse cálculo de baixo para cima (*“bottom-up”*), ou seja, de **F(0)** para **F(n)**, e utilizar um *array* para manter os valores entretanto calculados. Este método designa-se por **programação dinâmica** e reduz o tempo de cálculo à custa da utilização de mais memória para armazenar os valores intermédios.
* Usando **programação dinâmica**, implemente uma **função iterativa** para calcular F(n). **Não utilize um array global.**
* Construa um programa para executar a função iterativa que desenvolveu para **sucessivos valores de n** e que permita **contar o número de multiplicações efetuadas** para cada valor de n.
* **Preencha as últimas colunas tabela anterior** com o resultado da função iterativa e o número de multiplicações efetuadas para os sucessivos valores de n.
* Analisando os dados da tabela, estabeleça uma **ordem de complexidade** para a **função iterativa**.

|  |
| --- |
| **Usando o rácio F(2n)/F(n) , observamos que tende para um valor constante 4,000… , o que resulta numa ordem de complexidade, quadrática .**  ***Conclui-se que, a função iterativa tem um desempenho temporal melhor em relação a função recursiva.***  **Obs: a análise pode ser verificada no ficheiro Excel em anexo do file zip** |

Função Recursiva – Análise Formal da Complexidade

* Escreva uma **expressão recorrente** (direta) para o **número de multiplicações** efetuadas pela função recursivaF(n). Obtenha, depois, uma **expressão recorrente simplificada**. Note que . **Sugestão:** efetue a subtração .

|  |
| --- |
| **Designando M(n) como número de multiplicações, tem-se:**  **M(n) =**  **M(n) = , substituindo n por n – 1, obtém-se :**  **M(n-1) = e fazendo subtração de com , tem-se:**  **M(n) - M(n-1) =** |

**­­**

* A equação de recorrência obtida é uma **equação de recorrência linear não homogénea**. Considere a correspondente **equação de recorrência linear homogénea**. Determine as raízes do seu **polinómio característico** (Sugestão: use o **Wolfram Alpha**). Sem determinar as constantes associadas, escreva a **solução da equação de recorrência linear não homogénea**.

|  |
| --- |
| **← Equação característica**  **Solução da equação característica usando Wolfram Alpha**      **usando a fórmula de Moivre, tem-se:**  **A solução particular é e, da equação de recorrência linear não homogénea é :** |

**­­**

* Usando a solução da equação de recorrência obtida acima, determine a **ordem de complexidade do número de multiplicações** efetuadas pela função recursiva. **Compare** a ordem de complexidade que acabou de obter com o resultado da **análise experimental**.

|  |
| --- |
| **Na solução de recorrência obtida acima, o termo de maior relevância é , para .**  **Logo, a ordem de complexidade é , exponencial**  **Comparando a ordem de complexidade do número de multiplicações da função recursiva da análise experimental com a ordem obtida formalmente, nota-se que, em ambos os casos possuem a mesma ordem de complexidade, com pequena diferença na quarta casa decimal.** |

Programação Dinâmica – Análise Formal da Complexidade

* Considerando o número de multiplicações efetuadas pela função iterativa, efetue a análise formal da sua complexidade. Obtenha uma **expressão exata e simplificada para o número de multiplicações** efetuadas.

|  |
| --- |
| **Designando M(n) como número de multiplicações, tem-se:**  ***Propriedade***  **Logo, a expressão do número de multiplicações efetuadas pela função iterativa é:**  **Exemplo: M(10)=1/2(100-30+2)=1/2(72)=36 (como queríamos confirmar com resultado da tabela)** |

**­­**

* Usando a expressão obtida acima, determine a **ordem de complexidade do número de multiplicações** efetuadas pela função iterativa. **Compare** a ordem de complexidade que acabou de obter com o resultado da **análise experimental**.

|  |
| --- |
| **A ordem de complexidade do número de multiplicações efetuadas pela função iterativa obtida na expressão acima é .**  **Comparando a ordem de complexidade do número de multiplicações da função iterativa da análise experimental com a ordem obtida formalmente, nota-se que, em ambos os casos a possuem mesma ordem de complexidade.** |